LOGARITAMSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Pre nego što krenete u rešavanje jednačine savetujemo vam da se podsetite OSNOVNIH SVOJSTAVA I DEFINICIJE LOGARITAMA: $\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x}$ **je definicija a svojstva su:**

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n \log_a x$
6. $\log_{a^s} x = \dfrac{1}{s} \log_a x$
7. $\log_a b \cdot \log_a a = 1 \quad tj. \quad \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
8. Za prelazak na neku novu bazu c: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
9. $a^{\log_a b} = b$

1) Rešiti jednačine:

a) $\log_3 (2x+3) = 2$

b) $\log_4 (3x+4) = 3$

c) $\log \sqrt{3x+1} = \dfrac{1}{2}$

<u>Rešenje:</u>

a) $\log_3 (2x+3) = 2 \longrightarrow$ Iskoristićemo definiciju $\log_A B = \otimes \Leftrightarrow B = A^{\otimes}$

Dakle:

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 3^2 \\ 2x+3 &= 9 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad \text{uz uslov} \qquad \begin{aligned} 2x+3 &> 0 \\ 2x &> -3 \\ x &> -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Pošto je $3 > -\dfrac{3}{2}$, rešenje $x = 3$ je “dobro’’

b) $\log_4(3x+4)=3 \rightarrow$ Opet po definiciji

$$3x+4=4^3 \qquad\qquad 3x+4>0$$
$$3x+4=64 \qquad \text{uslov} \qquad 3x>-4$$
$$3x=60$$
$$x=20 \qquad\qquad x>-\frac{4}{3}$$

Rešenje zadovoljava uslov!

v) $\log\sqrt{3x+1}=\frac{1}{2} \rightarrow$ Primetimo da nema osnova, pa dopišemo 10 po dogovoru.

$$\log_{10}\sqrt{3x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3x+1}=10^{\frac{1}{2}} \qquad \text{uz uslov} \qquad \sqrt{3x+1}>0$$
$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{10}......./()^2\ kvadriramo \qquad 3x+1>0$$
$$3x=9 \qquad\qquad x>-\frac{1}{3}$$
$$x=3$$

$3>-\frac{1}{3}$, dobro je rešenje.

2) Rešiti jednačine:

a) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$

b) $\log(x^2+19)-\log(x-8)=2$

v) $\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=1$

__**Rešenja:**__

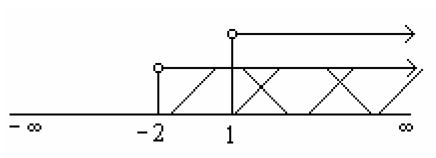
a) **Iskoristićemo** $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$

$$\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$$
$$\log_2(x-1)(x+2)=2 \rightarrow \qquad \text{Uslovi } x-1>0 \text{ i } x+2>0$$
$$x>1 \quad \text{i} \quad x>-2$$

Dalje po definiciji: $\log_a b=x \Leftrightarrow b=a^x$

$$(x-1)(x+2)=2^2$$
$$x^2+2x-x-2=4$$
$$x^2+x-6=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2}$$
$$x_1=2$$
$$x_2=-3$$

Dalje se pitamo da li rešenja zadovoljavaju uslove: $x>1$ i $x>-2$



$x\in(1,\infty)$

$x_1=2 \rightarrow$ Zadovoljava

$x_2=-3 \rightarrow$ Ne zadovoljava

Dakle, jedino rešenje je $x=2$

b) $\log(x^2+19)-\log(x-8)=2$

Dopišemo najpre osnovu 10

$$\log_{10}(x^2+19)-\log_{10}(x-8)=2$$

Pošto je $\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$

$$\log_{10}\frac{x^2+19}{x-8}=2$$ naravno uz uslove: $x^2+19>0$ i $x-8>0$

$x>8$

$$\frac{x^2+19}{x-8}=10^2$$

$$\frac{x^2+19}{x-8}=100$$

$$x^2+19=100(x-8)$$

$$x^2+19=100x-800$$

$$x^2-100x+819=0$$

$$x_{1,2}=\frac{100\pm 82}{2}$$

$$x_1=91$$

$$x_2=9$$

Oba rešenja "dobra'' jer su veća od 8

v)

$$\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=1$$

$$\log(5-x)+\log\sqrt{3-x}^{\,2}=1$$

$$\log(5-x)+\log(3-x)=1$$

Uslovi su:

$5-x>0$		$3-x>0$
$-x>-5$	i	$-x>-3$
$x<5$		$x<3$

Dakle uslov je $\boxed{x<3}$

$$(5-x)(3-x)=10^1$$

$$15-5x-3x+x^2-10=0$$

$$x^2-8x+5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{44}}{2}=\frac{8\pm 2\sqrt{11}}{2}=\frac{2(4\pm\sqrt{11})}{2}=4\pm\sqrt{11}$$

$$x_1=4+\sqrt{11}\approx 7{,}32$$

$$x_2=4-\sqrt{11}\approx 0{,}68$$

$x_1=4+\sqrt{11}$ ne zadovoljava uslov, pa je jedino rešenje: $x=4-\sqrt{11}$

3) Rešiti jednačine:

a) $\log^2 x - 3\log x + 2 = 0$

b) $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$

<u>Rešenja:</u>

a) Uvodimo smenu $\log x = t$ uz uslov $x > 0$

$$\log^2 x - 3\log x + 2 = 0$$
$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$
$$t_1 = 2$$
$$t_2 = 1$$

Vratimo se u smenu $\log_{10} x = 2$, $x = 10^2$, $x = 100$ i $\log_{10} x = 1$, $x = 10^1$, $x = 10$

b) $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$ kako je $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2} \rightarrow$ Uvodimo smenu $\log_2 x = t$ uz uslove $x > 0$ i $x \neq 1$

$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \rightarrow$ Sve pomnožimo sa 2t

$$2t^2 + 2 = 5t$$
$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$
$$t_1 = 2$$
$$t_2 = \frac{1}{2}$$

Vratimo se u smenu : $\log_2 x = 2$, $x = 2^2$, $x = 4$ ili $\log_2 x = \frac{1}{2}$, $x = 2^{\frac{1}{2}}$, $x = \sqrt{2}$

4) Rešiti jednačine:

a) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$

b) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

Rešenje: U oba primera ćemo koristiti da je:

$$\log_{a^S} x = \frac{1}{S}\log_a x$$

a)

$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$ uslov x > 0

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^4} x = 7$$
$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 x = 7 /\cdot 4$$
$$4\log_2 x + 2\log_2 x + 1\log_2 x = 28$$
$$7\log_2 x = 28$$
$$\log_2 x = 4$$
$$x = 2^4 \Rightarrow x = 16$$

b)

$$\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$$
$$\log_3 x \cdot \log_{3^2} x \cdot \log_{3^3} x \cdot \log_{3^4} x = \frac{2}{3}$$
$$\log_3 x \cdot \frac{1}{2}\log_3 x \cdot \frac{1}{3}\log_3 x \cdot \frac{1}{4}\log_3 x = \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{24}\log_3^4 x = \frac{2}{3}$$
$$\log_3^4 x = 16 \Rightarrow \log_3 x = t$$
$$t^4 - 16 = 0 \Rightarrow (t^2)^2 - 4^2 = (t^2-4)(t^2+4) = 0$$
$$(t-2)(t+2)(t^2+4) = 0$$

odavde je t = 2 ili t = -2

Kada se vratimo u smenu

$\log_3 x = 2$ ili $\log_3 x = -2$

$x = 3^2$ $x = 3^{-2}$

$x = 9$ $x = \frac{1}{9}$

5)

Rešiti jednačine:

a) $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$

b) $\log(7-2^x)-\log(5+4^x)+\log 7=0$

Rešenja:

a)

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$$

Kako je $\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$

Imamo:

$$\log_{\sqrt{5}}\frac{4^x-6}{2^x-2}=2$$
$$\frac{4^x-6}{2^x-2}=\sqrt{5}^2$$
$$4^x-6=5(2^x-2)$$
$$4^x-6=5\cdot 2^x-10$$
$$4^x-5\cdot 2^x+4=0 \Rightarrow smena\ 2^x=t$$
$$t^2-5t+4=0$$
$$t_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2}$$
$$t_1=4$$
$$t_2=1$$

Vratimo se u smenu:

$2^x=4$, $2^x=2^2$, $x=2$ ili $2^x=1$, $x=0$

Uslovi za datka su: $4^x-6>0$ i $2^x-2>0$

Rešavanje uslova bi nam donelo dodatni posao....

Ovde je najbolje da proverimo rešenja u početnoj jednačini,zamenimo jedno pa drugo rešenje i zaključimo → x=2 je jedino rešenje

b) $\log(7-2^x)-\log(5+4^x)+\log 7=0$

$\log_{10}(7-2^x)-\log_{10}(5+4^x)+\log_{10}7=0$

$\log_{10}(7-2^x)\cdot 7=\log_{10}(5+4^x)$.............../ *ANTILOGARITMOVANJE*

$(7-2^x)\cdot 7=5+4^x$

$49-7\cdot 2^x=5+4^x$

$49-7\cdot 2^x-5-4^x=0$

$-4^x-7\cdot 2^x+44=0/(-1)$

$4^x+7\cdot 2^x-44=0$..................................*smena* $2^x=t$

$t^2+7t-44=0$

$t_{1,2}=\frac{-7\pm 15}{2}$

$t_1=4$

$t_2=-11$

Vratimo se u smenu:

$2^x=4$ ili $2^x=-11$ nema rešenja

$2^x=2^2$

$x=2$

Uslovi su $7-2^x>0$ i $5+4^x>0$ a rešenje je **x = 2** i ono ih očigledno zadovoljava!

6) Rešiti jednačine:

a) $x^{1+\log_3 x}=3x$

b) $x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}$

Rešenja:

Ovo je tip zadataka gde moramo logaritmovati obe strane za odgovarajuću osnovu!

a)

$x^{1+\log_3 x}=3x$................$/\log_3$

$\log_3 x^{1+\log_3 x}=\log_3 3x$ važi $\log_a b^n=n\log_a b$

$(1+\log_3 x)\log_3 x=\log_3 3+\log_3 x$............$\Rightarrow$ *smena* $\log_3 x=t$

$(1+t)\cdot t=1+t$

$t+t^2=1+t$

$t^2=1-t+t\Rightarrow t^2=1\Rightarrow t=\pm 1$

Vratimo se u smenu:

$\log_3 x=1$ ili $\log_3 x=-1$

$x=3^1$ ili $x=3^{-1}$

$x=3$ ili $x=\frac{1}{3}$

b)

$$x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)} \rightarrow \text{ logaritmujemo za osnovu 4}$$

$$\log_4 x^{\log_4 x-2}=\log_4 2^{3(\log_4 x-1)}$$
$$(\log_4 x-2)\log_4 x=3(\log_4 x-1)\log_4 2$$
$$(\log_4 x-2)\log_4 x=3(\log_4 x-1)\log_{2^2} 2$$
$$(\log_4 x-2)\log_4 x=3(\log_4 x-1)\cdot\frac{1}{2}$$

Smena $\log_4 x=t$:

$$(t-2)\cdot t=\frac{3}{2}(t-1)$$
$$2t(t-2)=3(t-1)$$
$$2t^2-4t=3t-3$$
$$2t^2-4t-3t+3=0$$
$$2t^2-7t+3=0$$
$$t_{1,2}=\frac{7\pm 5}{4}$$
$$t_1=3$$
$$t_2=\frac{1}{2}$$

Dakle:

$$\log_4 x=3 \quad \text{ili} \quad \log_4 x=\frac{1}{2}$$

$$x=4^3 \quad \text{ili} \quad x=4^{\frac{1}{2}}$$
$$x=64 \quad \text{ili} \quad x=2$$

Za logaritamske <u>nejednačine</u> koristimo iste "trikove'' kao za jednačine, ali vodimo računa:

1) **Kad je osnova <u>veća od 1</u> ($a>1$) <u>prepisujemo znak</u> nejednakosti jer je funkcija rastuća.**
2) **Kad je osnova <u>izmedju 0 i 1</u> ($0<a<1$) <u>okrećemo znak</u> nejednakosti jer je tada funkcija opadajuća.**

Kad postavimo uslove tj. oblast definisanosti, nadjemo i rešimo nejednačinu, trebamo naći njihov presek.

1) Reši nejednačine:

a) $\log_2(3x+4) \geq 0$
b) $\log_{\frac{1}{2}}(4x-3) < 0$
v) $\log_2(3x-5) < 1$

<u>Rešenja:</u>

a)

$\log_2(3x+4) \geq 0$ uslov $3x+4>0$

$3x+4 \geq 2^o$ $3x > -4$

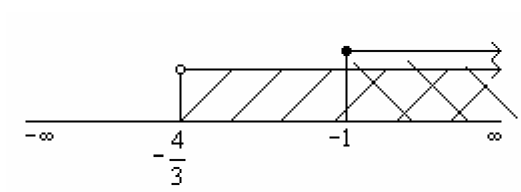
$3x+4 \geq 1$ $x > -\frac{4}{3}$

$3x \geq -3$

$x \geq -1$

ne okrećemo smer nejednakosti jer je osnova veća od 1

Sad upakujemo rešenje i oblast definisanosti.



Konačno: $x \in [-1, \infty)$

b)

$\log_{\frac{1}{2}}(4x-3) < 0$ uslov: $4x-3>0$

$4x>3$

PAZI: Okrećemo znak! $x > \frac{3}{4}$

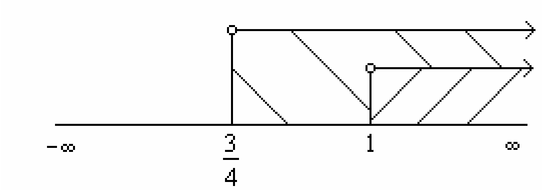
$4x-3 > \left(\frac{1}{2}\right)^o$

$4x-3>1$

$4x>4$

$x>1$

Upakujemo ova dva:



Konačno: $x \in (1, \infty)$

v)

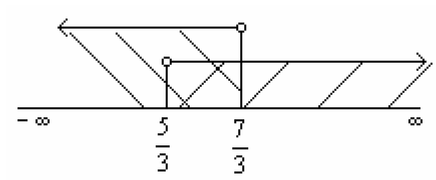
$$\log_2(3x-5)<1 \qquad \text{uslov} \qquad 3x-5>0$$

$$3x-5<2^1 \qquad\qquad 3x>5$$

$$3x-5<2 \qquad\qquad x>\frac{5}{3}$$

$$3x<7$$

$$x<\frac{7}{3}$$



$$x\in\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$$

2) Rešiti nejednačine:

a) $\log(x-2)>\log x$
b) $\log_{0,5}(2x+6)>\log_{0,5}(x+8)$

<u>Rešenja:</u>

a)

$$\log(x-2)>\log x \qquad \text{uslovi:} \qquad x-2>0 \quad \text{i} \quad x>0$$

$$x-2>x \qquad\qquad x>2 \quad \text{i} \quad x>0$$

$$x-x>2 \qquad\qquad \text{Dakle} \quad x>2$$

$$\boxed{0x>2}$$

Ovo nema rešenja, pa cela nejednačina nema rešenja!

b)

$$\log_{0,5}(2x+6)>\log_{0,5}(x+8)$$

PAZI: Okreće se smer

<u>Uslovi:</u>

$$2x+6<x+8$$

$$2x-x<8-6$$

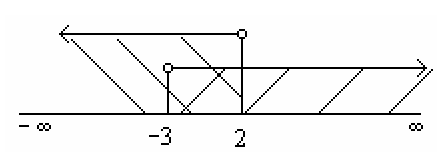
$$x<2$$

$$2x+6>0 \ \wedge \ x+8>0$$

$$x>-3\wedge x>-8$$

<u>Uslovi daju :</u> $x>-3$

Upakujemo:



$x\in(-3,2)$ konačno rešenje

3) Rešiti jednačine:

a) $\log_3(x^2-5x+6)<0$

b) $\log_{0,5}(x^2-4x+3)\geq -3$

Rešenja:

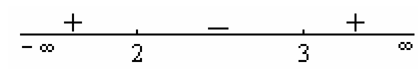
a)

$\log_3(x^2-5x+6)<0$ uslov $x^2-5x+6>0$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

$x_1=3$

$x_2=2$



$x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$ Rešenje uslova

$x^2-5x+6<3^o$

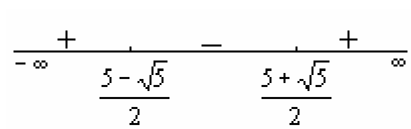
$x^2-5x+6<1$

$x^2-5x+5<0$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

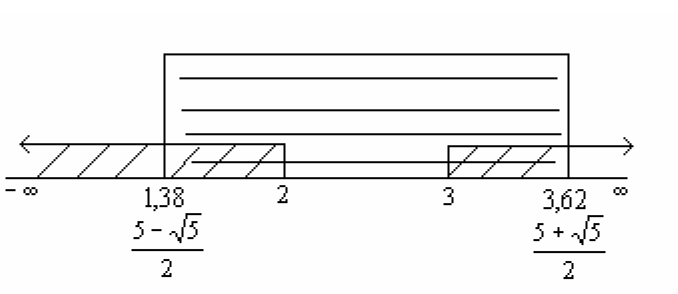
$$x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\approx 3,62$$

$$x_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\approx 1,38$$



$x\in\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ rešenje zadatka konačno rešenje dobijemo kad upakujemo ova dva

Dakle:



Konačno rešenje: $x\in\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},2\right)\cup\left(3,\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$

b)

$$\log_{0,5}(x^2-4x+3)\geq -3$$

$$x^2-4x+3\leq (0,5)^{-3}$$

$$x^2-4x+3\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x^2-4x+3\leq 2^3$$

$$x^2-4x+3\leq 8$$

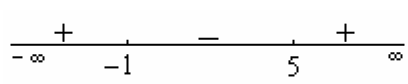
$$x^2-4x+3-8\leq 0$$

$$x^2-4x-5\leq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 6}{2}$$

$$x_1=5$$

$$x_2=-1$$



$$x\in[-1,5]$$

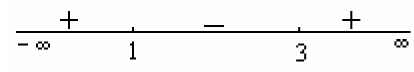
uslov:

$$x^2-4x+3>0$$

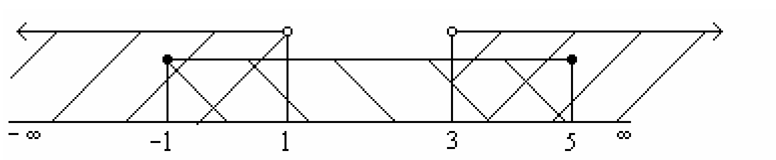
$$x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}$$

$$x_1=3$$

$$x_2=1$$



Upakujemo rešenja:



Konačno rešenje: $x\in[-1,1)\cup(3,5]$